

系数的关系, 知  $\begin{cases} x_3+x_4=2>0, \\ x_3x_4=\frac{1}{a}>0, \end{cases}$  则  
方程两根  $x_3, x_4$  均为正根, 且  
 $x_3 = \frac{2a-2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 - \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ ,  
 $x_4 = \frac{2a+2\sqrt{a^2-a}}{2a} = 1 + \frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ , 故  
由不等式  $ax^2-2ax+1>0$ , 解得  $x<1-\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$  或  $x>1+\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ , 又  $x>0$ , 所以  $0<x<1-\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$  或  $x>1+\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}$ .

综上所述, 若  $x>0$ ,  
则当  $a<0$  时, 不等式的解集  
为  $(0, 1-\frac{\sqrt{a^2-a}}{a})$ ;

当  $0\leq a<1$  时, 不等式的解集为  
 $(0, +\infty)$ ;

当  $a=1$  时, 不等式的解集为  $(0, 1)\cup(1, +\infty)$ ;

当  $a>1$  时, 不等式的解集为  
 $(0, 1-\frac{\sqrt{a^2-a}}{a})\cup(1+\frac{\sqrt{a^2-a}}{a}, +\infty)$ .

### 985 冲刺专题二 一元二次方程根的分布问题

1. D 【解析】设  $2x^2-(m+1)x+m=0$   
的两个不相等的正实根为  $x_1, x_2$ ,

$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 8m > 0, \\ x_1+x_2 = \frac{m+1}{2} > 0, \\ x_1x_2 = \frac{m}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m < 3-2\sqrt{2} \text{ 或 } m > 3+2\sqrt{2}. \text{ 故 D 正确.}$$

2. B 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} -a > 0, \\ 1+2a-a < 0, \\ 4+4a-a > 0, \end{cases} \quad \text{即 } \begin{cases} a < 0, \\ a < -1, \\ a > -\frac{4}{3}, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$-\frac{4}{3} < a < -1, \text{ 所以方程 } x^2+2ax-a=$$

0 在区间  $(0, 1)$  和  $(1, 2)$  各有一个根的充要条件是  $a \in (-\frac{4}{3}, -1)$ . 故 B 正确.

3. D 【解析】若  $m=0$ , 则  $y=-x-1$ ,  
其图象与  $x$  轴的交点横坐标为  $-1$ ,  
故  $m=0$  符合题意. 若  $m\neq 0$ , 函数  
 $y=2mx^2-x-1$  在区间  $(-2, 2)$  上与  
 $x$  轴恰有一个交点, 则需满足:

$$\begin{aligned} & \text{① } (8m+1)(8m-3) < 0 \text{ 或} \\ & \text{② } \begin{cases} 8m+1=0, \\ -2 < \frac{1}{4m} < 0 \end{cases} \text{ 或 } \text{③ } \begin{cases} 8m-3=0, \\ 0 < \frac{1}{4m} < 2. \end{cases} \quad \text{解} \\ & \text{① 得 } -\frac{1}{8} < m < 0 \text{ 或 } 0 < m < \frac{3}{8}; \text{ 解 ②} \end{aligned}$$

得  $m$  解集为  $\emptyset$ ; 解 ③ 得  $m = \frac{3}{8}$ . 综  
上, 实数  $m$  的取值范围是  
 $(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}]$ . 故 D 正确.

#### 易错警示 忽略含参函数的分

##### 类讨论致错

解此类二次项带参数问题, 容  
易忽视对二次项系数  $m$  进行讨  
论, 直接把  $y=2mx^2-x-1$  当作二次  
函数处理, 遗漏了  $m=0$  时的情  
况, 导致漏解.

4. D 【解析】记  $y=2kx^2-2x-5k-1$ ,  
由题意可知函数  $y$  的图象与  $x$  轴  
有两个交点, 所以  $k\neq 0$ . 若  $k>0$ , 则  
 $y=2kx^2-2x-5k-1$  为图象开口向  
上的二次函数, 函数图象与  $x$  轴有  
两个交点且其横坐标一个大于 1,  
一个小于 1, 则当  $x=1$  时,  $y=2k-2-5k-1<0$ , 得  $k>-1$ , 故  $k>0$ ; 若  $k<0$ , 则  $y=2kx^2-2x-5k-1$  为图象开口向下的二次函数, 函数图象与  $x$  轴有两个交点且其横坐标一个大于 1, 一个小于 1, 则当  $x=1$  时,  $y=2k-2-5k-1>0$ , 得  $k<-1$ , 故  $k<-1$ . 综上所述, 实数  $k$  的取值范围是  $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$ . 故 D 正确.

【一题多解】由两根情况得  $2k \cdot$

$(2k-2-5k-1)<0$ , 解得  $k<-1$  或  $k>0$ .

5.  $(1, \frac{7}{6}]$  【解析】函数  $y=x^2-$

$2(a+1)x+4$  的图象在区间  
 $[\frac{1}{2}, 3]$  上与  $x$  轴有两个交点, 即  
 $x^2-2(a+1)x+4=0$  在区间  
 $[\frac{1}{2}, 3]$  上有两个不同的根, 所以

$$\begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 16 > 0, \\ (\frac{1}{2})^2 - 2(a+1) \times \frac{1}{2} + 4 \geq 0, \\ (3)^2 - 2(a+1) \times 3 + 4 \geq 0, \\ \frac{1}{2} < a+1 < 3, \end{cases}$$

解得  $1 < a \leq \frac{7}{6}$ .

6. 【解】(1) 当  $a=4$  时, 可得  $x_1+x_2=4$ ,  
 $x_1x_2=3$ , 则  $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=16-6=10$ .

(2)  $\because x_1 \in (0, 1), x_2 \in (4, 5)$ ,

$$\begin{cases} 0^2 - a \times 0 + 3 = 3 > 0, \\ 1 - a + 3 = 4 - a < 0, \\ 16 - 4a + 3 = 19 - 4a < 0, \\ 25 - 5a + 3 = 28 - 5a > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{19}{4} < a < \frac{28}{5}, \text{ 故 } a \text{ 的范围 } (\frac{19}{4}, \frac{28}{5}).$$

7. 【解】 $m=0$  显然不符合题意.

当  $m\neq 0$  时, 因为方程  $mx^2+x+1=0$  在  
区间  $[-1, 1]$  上有两个不相等的实数

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0, \\ -1 < -\frac{1}{2m} < 1, \\ m(m-1+1) = m^2 \geq 0, \\ m(m+1+1) = m(m+2) \geq 0, \end{cases}$$

根, 所以  
解得  $m \leq -2$ . 所以实数  $m$  的取值范  
围为  $(-\infty, -2]$ .

8. 【解】(1) 当  $a=2$  时,  $y=x^2-2x+1=$   
 $(x-1)^2$  的图象的对称轴为直线  
 $x=1$ , 且开口向上, 所以  $x=1$  时,  
 $y_{\min}=0$ ;

又  $x=0$  时,  $y=1$ ,  $x=3$  时,  $y=4$ , 所  
以  $y_{\max}=4$ , 所以当  $x \in [0, 3]$ ,  $y$  的

取值范围为  $[0, 4]$ .

(2)  $\because x^2 - ax - a + 3 = 0$  有两个不相等的实数根分别为  $x_1, x_2$ , 且  $x_1 x_2 > 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 x_2 > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a^2 - 4(-a+3) > 0, \\ -a+3 > 0, \end{cases}$$

解得  $a < -6$  或  $2 < a < 3$ , 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -6) \cup (2, 3)$ .

### 985 冲刺专题三 与一元二次不等式有关的恒成立与有解问题

**1. D** 【解析】当  $a = 0$  时, 不等式化为  $2 > 0$ , 恒成立;

当  $a \neq 0$  时, 要满足题意, 只需

$$\begin{cases} a > 0, \\ \Delta = a^2 - 8a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < 8.$$

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $[0, 8)$ . 故 D 正确.

**2. B** 【解析】当  $x \in [-3, -1]$  时,  $x^2 + ax + 4 \geq 0$  恒成立, 即  $a \leq$

$$-\left(x + \frac{4}{x}\right) \text{ 恒成立, 因此只需 } a \leq$$

$$\left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min}. \text{ 令 } y = -\left(x + \frac{4}{x}\right),$$

$x \in [-3, -1]$ , 则  $-x \in [1, 3]$ , 因为

$$y = (-x) + \left(-\frac{4}{x}\right) \geq 2\sqrt{(-x)\left(-\frac{4}{x}\right)} =$$

4, 当且仅当  $-x = -\frac{4}{x}$ , 即  $x = -2$  时

取等号, 所以当  $x \in [-3, -1]$  时,

$$\left[-\left(x + \frac{4}{x}\right)\right]_{\min} = 4, \text{ 所以 } a \leq 4, \text{ 即实数 } a \text{ 的最大值为 } 4.$$

**3. D** 【解析】因为  $x > 0, y > 0$ , 且  $\frac{1}{x+2} +$

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } x+2+y = \frac{3}{2}(x+2+y) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y}\right) = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{y}{x+2} + \frac{x+2}{y}\right) \geq$$

$$\frac{3}{2} \cdot \left(2 + 2\sqrt{\frac{y}{x+2} \cdot \frac{x+2}{y}}\right) = 6, \text{ 当且仅当}$$

当  $x+2 = y$ , 即  $y = 3, x = 1$  时取等

号, 所以  $x+2+y$  有最小值 6. 若  $x+$

$2+y > m^2 + 5m$  恒成立, 即  $6 > m^2 + 5m$

恒成立, 解得  $-6 < m < 1$ . 故 D 正确.

**4. BD** 【解析】关于  $x$  的不等式  $x^2 -$

$2ax + a > 0$  对  $\forall x \in \mathbf{R}$  恒成立, 可得

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \times 1 \times a < 0, \text{ 解得 } 0 < a <$$

1, 而  $(0, 1) \subsetneq (0, 1], (0, 1)$

$\subsetneq [0, +\infty)$ . 故 BD 正确.

**5. ABC** 【解析】不等式  $x^2 - 4x - a -$

$1 \geq 0$  在  $x \in [1, 4]$  上有解, 即  $a \leq$

$(x^2 - 4x - 1)_{\max}$  在  $[1, 4]$  上恒成立,

设  $y = x^2 - 4x - 1, x \in [1, 4]$ , 则  $y =$

$(x-2)^2 - 5$ , 而当  $x = 1$  时,  $y = -4$ , 当

$x = 4$  时,  $y = -1$ , 故  $y$  在  $[1, 4]$  上的

最大值为  $-1$ , 故  $a \leq -1$ , 所以  $a$  的

取值可以是  $-6, -5, -1$ . 故 ABC

正确.

**6.  $[-1, +\infty)$**  【解析】依题意可得,

$(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 \geq 0$  对于

$x \in \mathbf{R}$  恒成立, 当  $m+1 = 0$ , 即  $m =$

$-1$  时,  $(m+1)x^2 + (m+1)x + m + 2 =$

$1 \geq 0$ , 显然成立;

当  $m+1 \neq 0$  时, 由题意得

$$\begin{cases} m+1 > 0, \\ \Delta = (m+1)^2 - 4(m+1)(m+2) \leq 0, \end{cases}$$

解得  $m > -1$ . 综上, 实数  $m$  的取值

范围为  $[-1, +\infty)$ .

**7.  $(-\infty, \sqrt{3})$**  【解析】 $mx^2 - 6x + 3m <$

$$0 \text{ 变形为 } m < \frac{6x}{x^2+3} = \frac{6}{x+\frac{3}{x}}, \text{ 故 } m <$$

$$\left(\frac{6}{x+\frac{3}{x}}\right)_{\max} \text{ 在 } (0, 2] \text{ 上成立, 因为}$$

$$x \in (0, 2], \text{ 所以 } x + \frac{3}{x} \geq$$

$$2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}, \text{ 则 } \frac{6}{x+\frac{3}{x}} \leq \frac{6}{2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{3}, \text{ 当且仅当 } x = \frac{3}{x}, \text{ 即 } x = \sqrt{3} \text{ 时,}$$

等号成立, 所以  $m < \sqrt{3}$ .

**8. 【解】**(1)  $\because y = ax^2 + bx + c$  的图象的

对称轴为直线  $x = 1$ , 最小值为  $-1$ ,

且当  $x = 0$  时,  $y = 0$ ,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1, \\ c = 0, \\ \frac{4ac-b^2}{4a} = -1, \end{cases} \therefore \begin{cases} a = 1, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

$$\therefore y = x^2 - 2x.$$

(2)  $\because y > m - 2x$ , 即  $x^2 > m$  在  $[0,$

$3]$  上恒成立, 又  $\because$  当  $x \in [0, 3]$  时,

$x^2$  有最小值  $0$ ,  $\therefore m < 0$ ,  $\therefore$  实数  $m$

的取值范围为  $(-\infty, 0)$ .

**9. 【解】**(1) 当  $m = 0$  时, 显然  $-6 < 0$ ,

满足题意;

当  $m < 0$  时, 因为  $x^2 + x + 1 =$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以 } mx^2 + mx + m -$$

$6 = m(x^2 + x + 1) - 6 < 0$  恒成立, 满足

题意;

当  $m > 0$  时, 则需  $\Delta = m^2 - 4m(m -$

$6) > 0$ , 解得  $0 < m < 8$ .

综上, 实数  $m$  的取值范围是

$(-\infty, 8)$ .

(2) 由题可知, 当  $x \in [-2, 1]$  时,

$m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$  恒成立. 因为

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \text{ 所以}$$

$m(x^2 - x + 1) - 2 < 0$  等价于  $m <$

$$\frac{2}{x^2 - x + 1}. \text{ 因为 } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \text{ 在区}$$

间  $[-2, 1]$  上的最大值为  $7$ , 所以

$$y = \frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \text{ 在区间}$$

$[-2, 1]$  上的最小值为  $\frac{2}{7}$ , 所以只

需  $m < \frac{2}{7}$  即可, 所以实数  $m$  的取值

范围是  $\left(-\infty, \frac{2}{7}\right)$ .